MATERI 8
MATRIKS

Sub Materi :
1. Pengertian matriks dan vector
2. Kesamaan matriks dan kesamaan vector
3. Bentuk-bentuk khas matriks
4. Pengubahan matriks
5. Matriks bersekat
6. Determinan matriks
7. Adjoin matriks
8. Penerapan matriks

Pertemuan ke-13, 14 dan 15
Tujuan Khusus Pembelajaran :
Setelah menyelesaikan pertemuan ini, mahasiswa mampu :
1. Memberikan contoh matriks
2. Menyelesaikan soal matriks
3. Mengaplikasikan konsep matriks dalam kasus ekonomi

A. Ringkasan materi

Definisi

- Matriks ialah kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang, serta termuat diantara sepasang tanda kurung.
- Secara umum, suatu matriks dituliskan sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Vektor ialah bentuk matriks khusus yang hanya mempunyai satu baris atau satu kolom.
- Vektor baris adalah matriks sebaris atau matriks berbaris tunggal
- Vektor kolom adalah matriks sekolom atau matriks berkolom tunggal
- Contoh vektor baris :

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

- Contoh vektor kolom :

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Pengoperasian matriks dan vektor

- Penjumlahan dan pengurangan matriks

$$\boldsymbol{A \pm B = C \; dimana \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

- Dalam penjumlahan antar matriks berlaku kaidah komutatif dan kaidah asosiatif

- Kaidah komutatif :
  $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$

  Kaidah asosiatif :
  $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

  Perkalian matriks dengan skalar
- Hasilkali sebuah matriks dengan suatu skalar atau bilangan nyata λ adalah sebuah matriks baru yang berorde sama dan unsur-unsurnya λ kali unsur-unsur semula
- Untuk perkalian matriks dengan skalar berlaku kaidah komutatif dan kaidah distributif
- Kaidah komutatif :
  $\boldsymbol{\lambda A} = \boldsymbol{A\lambda}$
- Kaidah distributif :
  $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\lambda A} \pm \boldsymbol{\lambda B}$

  Perkalian antar matriks
- Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila jumlah kolom dari matriks yang dikalikan sama dengan jumlah baris dari matriks pengalinya.
- Hasil kali dua buah matriks dengan adalah sebuah matriks baru, yang unsur-unsurnya merupakan perkalian silang unsur-unsur baru matriks A dengan unsur-unsur matriks B.

  $$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

  Perkalian matriks dengan vektor
- Sebuah matriks yang bukan berbentuk vektor hanya dapat dikalikan dengan sebuah vektor kolom, dengan catatan jumlah kolom matriks sama dengan dimensi vektor kolom yang bersangkutan, hasilnya adalah berupa sebuah vektor kolom baru.
  $A_{m\times n} \times B_{n\times 1} = C_{m\times 1}$

  Bentuk-bentuk khas matriks
- Matriks satuan
  $\boldsymbol{I_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$
- Matriks diagonal
  Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar yang semua unsurnya nol kecuali pada diagonal utama.
  $\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

- Matriks nol

  Matriks nol adalah matriks yang semua unsurnya nol.

  $$0_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriks ubahan

  $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Matriks simetrik

  Matriks simetrik adalah matriks bujursangkar yang sama dengan ubahannya. Matriks A dikatakan simetrik apabila A = A'.

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

- Matriks simetrik miring

  Matriks simetrik miring adalah matriks bujursangkar yang sama dengan negatif ubahannya. Matriks A dikatakan simetrik miring (skew symmetric) apabila A=-A' atau A'=-A.

  $$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad -A' = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriks balikan

  Matriks balikan (inverse matriks) adalah matriks yang apabila dikalikan dengan suatu matriks bujursangkar menghasilkan sebuah matriks satuan. Jika A merupakan sebuah matriks bujursangkar, maka balikannya dituliskan dengan notasi A^{-1} dan $AA^{-1} = I$

  $$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/9 & 2/9 \\ 4/27 & 1/27 \end{bmatrix} \quad AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

  Determinan matriks

- Determinan dari sebuah matriks ialah penulisan unsur-unsur sebuah matriks bujursangkar dalam bentuk determinan, yaitu diantara sepasang garis tegak atau .
- Pencarian nilai numerik dari suatu determinan dapat dilakukan dengan cara mengalikan unsur-unsurnya secara diagonal.

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

  Adjoin matriks

  Adjoin dari sebuah matriks adalah ubahan dari matriks kofaktor-kofaktornya

  $$adj.A = [A_{ij}]'$$

  Penerapan Matriks dalam Ekonomi

  Analisis Input Output

- Analisis I-O merupakan suatu model matematis untuk menelaah struktur perekonomian yang saling kait mengait antar sektor atau kegiatan ekonomi.

- Model ini lazim diterapkan untuk menganalisis perekonomian secara makro, nasional ataupun regional.
- Analisis I-O bertolak dari anggapan bahwa suatu sistem perekonomian terdiri atas sektor-sektor yang saling berkaitan.
- Masing-masing sektor menggunakan keluaran dari sektor lain sebagai masukan bagi keluaran yang akan dihasilkannya, kemudian keluaran yang dihasilkannya merupakan masukan pula bagi sektor lain.
- Selain menjadi masukan bagi sektor lain, terdapat pula keluaran dari suatu sektor yang menjadi masukan bagi sektor itu sendiri dan sebagai barang konsumsi bagi pemakai akhir.
- Matrik transaksi

	Distribusi Konsumsi	Permintaan Akhir	Keluaran Total
Distribusi	X_{11} X_{12} …… X_{1m}	U_1	X_1
Produksi	X_{21} X_{22} …… X_{2m}	U_2	X_2
	X_{m1} X_{m2} …… X_{mm}	U_m	X_m
Nilai tambah	Y_1 Y_2…………….Y_m	U_{m+1}	X_{m+1}
Keluaran total	X_1 X_2…………….X_m	X_{m+1}	X

Pemakaian total oleh sektor i:

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij} + U_i$$

Keluaran total dari sektor j:

$$X_j = \sum_{j=1}^{m} X_{ij} + Y_j$$

- Matriks teknologi
  Koefisien teknologi aij adalah suatu rasio yang menjelaskan jumlah atau nilai keluaran sektor i yang diperlukan sebagai masukan untuk menghasilkan satu unit keluaran di sektor j.

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$$

B. Kegiatan Pembelajaran

1. Mengkaji materi melalui ceramah dan melakukan tanya jawab mengenai konsep matriks
2. Memberikan contoh matriks
3. Mengaplikasikan matriks dalam penerapan ekonomi

C. Evaluasi Pembelajaran

1). Jika

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ dan } q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

maka p x q = ...

2). Invers matriks

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ adalah ....}$$

D. Referensi

Chiang, Alpha C., Dasar-Dasar Matematika Ekonomi, Jilid 1, Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, Jakarta

Dumairy, (2003/2004), Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, Cetakan ke 12, BPFE Yogyakarta, Yogyakarta.

H. Johannes dan Budiono Sri Handoko, (1994), Pengantar Matematika untuk Ekonomi, LP3ES, Jakarta.