

MATERI 5 DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA

Sub Materi:

1. Kuosien deferensi dan derivative
2. Kaidah-kaidah diferensiasi
3. Hakikat derivative dan diferensial
4. Derivatif dari derivatif
5. Hubungan antara fungsi dan derivatifnya
6. Penerapan ekonomi

Pertemuan ke-9

Tujuan Khusus Pembelajaran :

Setelah menyelesaikan pertemuan ini, mahasiswa mampu :

1. Memberikan contoh diferensial fungsi sederhana
2. Menyelesaikan soal diferensial fungsi sederhana
3. Mengaplikasikan konsep diferensial fungsi sederhana dalam kasus ekonomi

A. Ringkasan materi

Kaidah diferensiasi

1. Diferensiasi konstanta

Jika $y = k$, dimana k adalah konstanta, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

2. Diferensiasi fungsi pangkat

$y = x^n$, dimana n adalah konstanta, maka $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

3. Diferensiasi perkalian konstanta dengan fungsi

Jika $y = kv$, dimana $v = h(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = k \frac{dv}{dx}$

4. Diferensiasi pembagian konstanta dengan fungsi

Jika $y = \frac{k}{v}$, dimana $v = h(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = -\frac{k \frac{dv}{dx}}{v^2}$

5. Diferensiasi penjumlahan (pengurangan) fungsi

Jika $y = u \pm v$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$

maka $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

6. Diferensiasi perkalian fungsi

Jika $y = uv$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

7. Diferensiasi pembagian fungsi

Jika $y = \frac{u}{v}$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

8. Diferensiasi fungsi komposit

Jika $y = f(u)$ sedangkan $u = g(x)$, dengan kata lain $y = f\{g(x)\}$

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

9. Diferensiasi fungsi berpangkat

Jika $y = u^n$, dimana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

10. Diferensiasi fungsi logaritmik

$$\text{Jika } y = {}^a \log x, \text{ maka } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

11. Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik

$$\text{Jika } y = {}^a \log u, \text{ dimana } u = g(x), \text{ maka } \frac{dy}{dx} = \frac{{}^a \log e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

12. Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik berpangkat

Jika $y = ({}^a \log u)^n$, dimana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta,

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{{}^a \log e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

13. Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik-Napier

$$\text{Jika } y = \ln u, \text{ dimana } u = g(x), \text{ maka } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

15. Diferensiasi fungsi komposit-logaritmik-Napier-berpangkat

Jika $y = (\ln u)^n$, dimana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta,

$$\text{maka } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

16. Diferensiasi fungsi eksponensial

$$\text{Jika } y = a^x, \text{ dimana } a \text{ adalah konstanta, maka } \frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

17. Diferensiasi fungsi komposit-eksponensial

Jika $y = a^u$, dimana $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

18. Diferensiasi fungsi kompleks

Jika $y = u^v$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$,

maka $\frac{dy}{dx} = vu^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v \cdot \ln u \cdot \frac{dv}{dx}$

19. Diferensiasi fungsi balikan

Jika $y = f(x)$ dan $x = g(x)$ adalah fungsi-fungsi yang saling berbalikan (inverse function), maka :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

20. Diferensiasi implisit

Jika $f(x,y) = 0$ merupakan fungsi implisit sejati (tidak mungkin dieksplicitkan), dy/dx dapat diperoleh dengan mendiferensiasikannya suku demi suku, dengan menganggap y sebagai fungsi dari x .

Titik ekstrim fungsi parabolik

- Parabola $y = f(x)$ mencapai titik ekstrim pada $y' = 0$
- Jika $y'' < 0$, bentuk parabolanya terbuka ke bawah, titik ekstrimnya adalah titik maksimum
- Jika $y'' > 0$, bentuk parabolanya terbuka ke atas, titik ekstrimnya adalah titik minimum

Titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik

- Fungsi kubik $y = f(x)$ mencapai titik ekstrim pada $y' = 0$
- Jika $y'' < 0$ pada $y' = 0$, maka titik ekstrimnya adalah titik maksimum
- Jika $y'' > 0$ pada $y' = 0$, maka titik ekstrimnya adalah titik minimum
- Fungsi kubik $y = f(x)$ berada di titik belok pada $y'' = 0$

Contoh penerapan ekonomi

- Fungsi permintaan teh mengikuti persamaan

$$Q_t = 5 + P_k - 2P_t$$

sedangkan fungsi permintaan kopi

$$Q_k = 7 - 2P_k + 2P_t$$

Jika harga teh 2 dan harga kopi 3, maka:

- Jumlah permintaan teh menjadi

$$Q_t = 5 + (3) - 2(2) = 4$$

lalu perubahan jumlah teh terhadap harga teh adalah:
 $dQ_t/dP_t = -2$. Sehingga elastisitas permintaan teh
 adalah: $E_t = (dQ_t/dP_t) \cdot (P_t/Q_t) = (-2) \cdot (2/4) = -1$

- Jumlah permintaan kopi menjadi $Q_k = 7 - 2(3) + 2(2) = 5$,
 lalu perubahan jumlah kopi terhadap harga kopi
 adalah: $dQ_k/dP_k = -2$. Sehingga elastisitas permintaan
 teh adalah: $E_k = (dQ_k/dP_k) \cdot (P_k/Q_k) = (-2) \cdot (3/5) = -6/5$

– Pengeluaran biaya sebuah perusahaan mengikuti
 fungsi $TC = Q^3 - 15Q^2 + 75Q$.

- Keluaran produk yang akan membuat pengeluaran
 biaya menjadi minimal dapat diperoleh pada saat
 turunan pertama fungsi pengeluaran biaya sama dengan
 nol, yaitu:

$$\begin{aligned} d(TC)/dQ = 0 &= 3Q^2 - 30Q + 75 = Q^2 - 10Q + 25 \\ &= (Q-5)(Q-5) \\ Q_1 &= Q_2 = 5 \end{aligned}$$

- Sehingga, pengeluaran biaya minimum adalah:

$$TC_{\min} = (5)^3 - 15(5)^2 + 75(5) + 15 = 140$$

– Produksi pabrik mengikuti fungsi $Q = 5K^{3/5}L^{2/5}$,
 maka:

- Fungsi persamaan MP_K adalah:

$$MP_K = dQ/dK = 3K^{-2/5}L^{2/5}$$

- Fungsi persamaan MP_L adalah:

$$MP_L = dQ/dL = 2K^{3/5}L^{-3/5}$$

B. Kegiatan Pembelajaran

1. Mengkaji materi melalui ceramah dan melakukan tanya jawab mengenai konsep diferensial fungsi sederhana
2. Memberikan contoh diferensial fungsi sederhana
3. Mengaplikasikan diferensial fungsi sederhana dalam penerapan ekonomi

C. Evaluasi Pembelajaran

Tentukan $f'(x)$ dari fungsi-fungsi berikut ini!

1). $f(x) = 3x^{12}$

2). $f(x) = -6x^2$

3). $f(x) = \frac{6}{x^5} - \frac{4}{x^2}$

4). $f(x) = (6x + 5)(3x + 4)$

5). $Y = (8x^2 + 5)^6$

D. Referensi

Chiang, Alpha C., Dasar-Dasar Matematika Ekonomi, Jilid 1, Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, Jakarta

Dumairy, (2003/2004), Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, Cetakan ke 12, BPFE Yogyakarta, Yogyakarta.

H. Johannes dan Budiono Sri Handoko, (1994), Pengantar Matematika untuk Ekonomi, LP3ES, Jakarta.