MATERI 4
LIMIT

Sub Materi :
1. Pengertian limit
2. Limit sisi kiri
3. Limit sisi kanan
4. Kaidah-kaidah limit
5. Penyelesaiaan kasus khusus
6. Kesinambungan
7. Penerapan ekonomi

Pertemuan ke-6 dan 7
Tujuan Khusus Pembelajaran :
Setelah menyelesaikan pertemuan ini, mahasiswa mampu :
1. Memberikan contoh limit
2. Menyelesaikan soal limit
3. Mengaplikasikan konsep limit dalam kasus ekonomi

A. Ringkasan materi

Pengertian limit

- Limit menggambarkan seberapa jauh sebuah fungsi akan berkembang apabila variabel di dalam fungsi yang bersangkutan terus menerus berkembang mendekati suatu nilai tertentu.
- Jika fungsi f(x) mendekati L manakala variabel x mendekati a (a dan L keduanya konstanta), maka L disebut limit fungsi f(x) untuk x mendekati a. Hubungan ini dilambangkan dengan notasi:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

- Notasi tersebut dibaca “limit fungsi f(x) untuk x mendekati a adalah L”. Artinya jika variabel x berkembang secara terus menerus hinggga m,endekati bilangan tertentu a, maka nilai fungsi f(x) pun akan berkembang pula hingga mendekati L. Atau sebaliknya, fungsi f(x) dapat dibuat mendewkati nilai tertentu yang diinginkan L dengan mengembangkan variabel x sedemikian rupa hingga mendekati a.

- Dua hal perlu diperhatikan dalam notasi atau pernyataan limit di atas. Pertama, x →a harus dibaca serta ditafsirkan sebagai x mendekati a, dan bukan berarti x=a.

- Kedua, lim f(x)=L harus dibaca serta ditafsirkan bahwa L adalah limit fungsi f(x), dan bukan berarti L adalah nilai fungi f(x).

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Atau bukan berarti

$$f(a) = L$$

- Limit sisi kiri dari sebuah fungsi adalah nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila variabelnya bergerak mendekati limitnya melalui nilai-nilai yang membesar (x →a dari sisi kiri, melalui nilai-nilai x<a). Jadi jika

  $$\lim_{x \to a^-} f(x) = L^-$$

  Berarti L- merupakan limit sisi kiri dari f(x) untuk x →a

- Limit sisi kanan dari sebuah fungsi adalah nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila variabelnya bergerak mendekati limitnya melalui nilai-nilai yang mengecil (x →a dari sisi kiri, melalui nilai-nilai x>a). Jadi jika

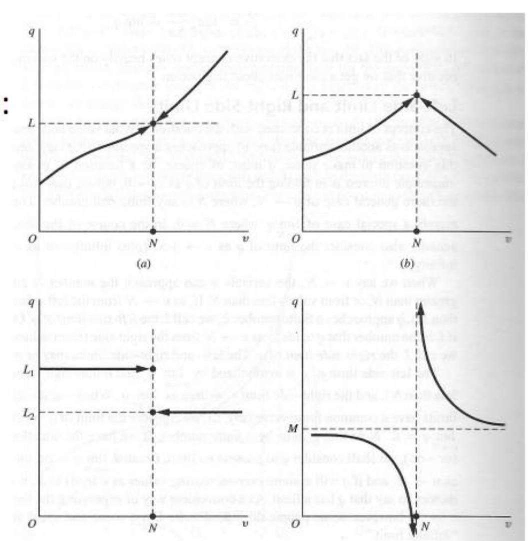
  $$\lim_{x \to a^+} f(x) = L^+$$

  Berarti L+ merupakan limit sisi kiri dari f(x) untuk x →a
- Limit sebuah fungsi dikatakan ada jika dan hanya jika limit sisi kiri dan limit sisi kanannya ada serta merta. Dalam kasus ini :

  $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

- Apabila salah satu dari ketentuan-ketentuan di atas tidak terpenuhi, maka limit dari fungsi yang bersangkutan tidak terdefinisi. Dengan demikian limit sebuah fungsi dikatakan tidak ada jika limit salah satunya tidak ada, atau limit kedua sisinya tidak ada, atau limit kedua sisinya ada tetapi tidak sama.

- Ilustrasi Grafis:
  a. Limit kiri = kanan
  b. Limit kiri = kanan
  c. Limit kiri ≠ kanan
  d. Limit kiri ≠ kanan



- Teorema Limit
  - Teorema Fungsi Tunggal
    - Teorema I

      Jika q = av + b, maka $\lim_{v \to N} q = aN + b$ a dan b ≡ konstanta
    - Teorema II

      Jika q = g(v) = b, maka: $\lim_{v \to N} q = b$
    - Teorema III

      Jika q = v, maka: $\lim_{v \to N} q = N$

      Jika q = v^k , maka: $\lim_{v \to N} q = N^k$

  - Teorema Fungsi Ganda

    Jika $\lim_{v \to N} q_1 = L_1$ dan $\lim_{v \to N} q_2 = L_2$
    - Teorema IV (limit penjumlahan)

      $$\lim_{v \to N} \left(q_1 \pm q_2\right) = L_1 \pm L_2$$
    - Teorema V (limit perkalian)

      $$\lim_{v \to N} \left(q_1 . q_2\right) = L_1 . L_2$$
    - Teorema VI (limit pembagian)

      $$\lim_{v \to N} \left(\frac{q_1}{q_2}\right) = \frac{L_1}{L_2} \quad ; L_2 \neq 0$$

Kesinambungan

- Sebuah fungsi f(x) dikatakan sinambung pada x = a jika :

  1. f(a) terdefinisi
  2. $\lim_{x \to a} f(x)$ terdefinisi
  3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ terdefinisi

- Fungsi f(x)dikatakan sinambung dalam suatu interval b ≤ x ≤ c (atau interval b < x < c) jika ia sinambung pada setiap titik di dalam interval tersebut.
- Fungsi f(x) yang tidak sinambung pada suatu titik dimana x = a dikatakan asinambung pada x = a
- Ketidaksinambungan sebuha fungsi dapat berbentuk salah satu dari tiga kemungkinan : asinambung tak berhingga, asinambung berhingga, dan asinambung titik.
- Fungsi f(x) dikatan asinambung tak berhingga pada x = a jika f(x) menjadi (positif atau negatif) tak terhingga untuk x→a, yaitu jika f(a) dan lim f(x) untuk x→a tidak terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung tak berhingga pada x=a mendekati x=a sebagai sebuah asimtot.

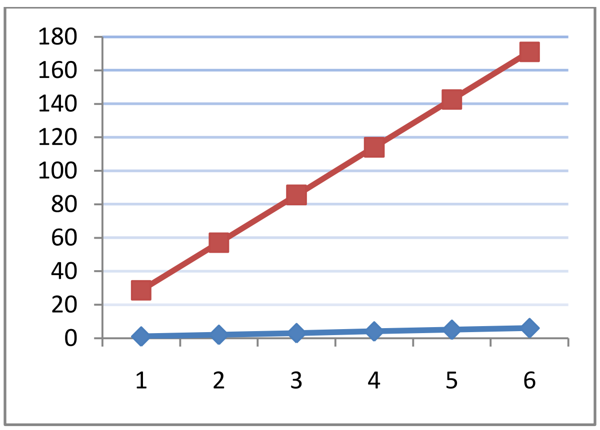
- Fungsi f(x) dikatakan asinambung berhingga pada x=a jika f(x) terdefinisi tapi berubah secara drastis pada x=a, yaitu jika f(a) terdefinisi dan lim f(x) untuk x→a tidak terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung berhingga pada x=a mempunyai dua macam nilai f(a) untuk x→a yaitu limit masing-masing sisinya.
- Ciri khas dari fungsi yang memiliki ketidaksinambungan berhingga (finite discontinuity) adalah bahwa nilai fungsinya sama dengan limit salah satu sisinya.
- Fungsi f(x) dikatakan asinambung titik pada x=a jika f(a) tidak terdefinisi tapi lim f(x) untuk x→a terdefinisi. Kurva dari fungsi yang asinambung titik pada x=a tampak seakan-akan sinambung, namun sesungguhnya terputus karena pada x=a tersebut f(x) tidak terdefinisi. Titik dimana f(x) tidak terdefinisi dinamakan "titik yang hilang" dalam fungsi yang bersangkutan.

Penerapan Ekonomi

Andaikan harga jual sebuah mobil Rp 27,5 juta. Jika Q melambangkan jumlah mobil yang terjual dan R melambangkan penerimaan penjualan dalam jutaan rupiah, fungsi penerimaannya dapat dituliskan sebagai :

R = 27,5Q untuk Q= 1,2,3,4,….

Dan secara grafik ditunjukkan oleh gambar berikut :



Fungsinya diskrit, dalam hal ini sarat akan ketidaksinambungan, mengingat Q berlaku hanya untuk bilangan-bilangan bulat. Penjual tidak mungkin menjual (misalnya) 3,5 buah mobil atau memperoleh penerimaan sebesar Rp 96,25 juta.

B. Kegiatan Pembelajaran

1. Mengkaji materi melalui ceramah dan melakukan tanya jawab mengenai konsep deret dan banjar
2. Memberikan contoh deret dan banjar
3. Mengaplikasikan deret dan banjar dalam penerapan ekonomi

C. Evaluasi Pembelajaran

Carilah nilai limit berikut ini!

1). $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 54}{x - 3}$

2). $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 + 6x^2 + 8x + 2}{10 - x + 3x^2 - 2x^3}$

3). $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - \sqrt{4x + 1}}{(x - 2)}$

4).

Nilai dari $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x^2 - 2x - 15)}{(x - 5)} = \ldots.$

D. Referensi

Chiang, Alpha C., Dasar-Dasar Matematika Ekonomi, Jilid 1, Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, Jakarta

Dumairy, (2003/2004), Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, Cetakan ke 12, BPFE Yogyakarta, Yogyakarta.

H. Johannes dan Budiono Sri Handoko, (1994), Pengantar Matematika untuk Ekonomi, LP3ES, Jakarta.