MATERI 3
FUNGSI NON LINIER

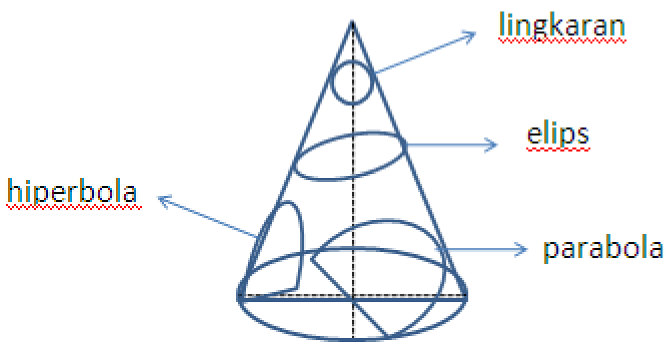
Sub Materi :
1. Penggal dan lereng garis lurus
2. Pembentukan persamaan linier
3. Hubungan dua garis lurus
4. Pencarian akar-akar persamaan linier
5. Penerapan ekonomi

Pertemuan ke-4 dan 5
Tujuan Khusus Pembelajaran :
Setelah menyelesaikan pertemuan ini, mahasiswa mampu :

1. Memberikan contoh fungsi non linier
2. Menyelesaikan soal fungsi non linier
3. Mengaplikasikan konsep fungsi non linier dalam kasus ekonomi

A. Ringkasan materi

- Gambar dari suatu fungsi kuadrat dapat berupa salah satu dari empat kemungkinan bentuk potongan kerucut : lingkaran, elips, hiperbola, atau parabola



Identifikasi persamaan kuadrat

- Bentuk umum :
  $$\boldsymbol{ax^2 + pxy + by^2 + cx + dy + e = 0}$$
  Dari bentuk yang lebih umum ini, dapat diidentifikasi gambar atau kurva dari persamaannya, yaitu sbb:
  $$\textit{Jika } p = 0 \textit{ dan } a = b \neq 0, \textit{kurvanya sebuah lingkaran}$$
  $$\textit{Jika } p^2 - 4ab < 0. \textit{kurvanya sebuah elips}$$
  $$\textit{Jika } p^2 - 4ab > 0. \textit{kurvanya sebuah hiperbola}$$
  $$\textit{Jika } p^2 - 4ab = 0. \textit{kurvanya sebuah parabola}$$

- Apabila p=0, dengan kata lain dalam persamaan kuadrat tersebut tidak terdapat suku yang mengandung xy, bentuk yang lebih umum tadi menjadi :
  $$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

- Berdasarkan bentuk dengan kasus khusus ini, identifikasinya menjadi sbb:
  Jika a = b ≠ 0,kurvanya sebuah lingkaran
  Jika a ≠ b, tetapi bertanda sama, kurvanya sebuah elips
  Jika a dan b berlawanan tanda, kurvanya sebuah hiperbola
  Jika a = 0 atau b = 0, tetapi tidak keduanya, kurvanya sebuah parabola

Lingkaran

- Bentuk umum persamaan lingkaran :
  $$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$
- Pusat dan jari-jari lingkaran dapat dicari dengan cara memanipulasi persamaan umum sedemikian rupa, sehingga :
  $$(x - i)^2 + (y - j)^2 = r^2$$
- Dimana i dan j masing-masing adalah jarak pusat lingkaran terhadap sumbu-sumbu y dan sumbu-sumbu horizontal x, r adalah jari-jari lingkaran.

Ellips

- Bentuk umum persamaan elips :
  $$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$
- Pusat dan jari-jari elips dapat dicari dengan cara memanipulasi persamaan umum sedemikian rupa, sehingga :
  $$\frac{(x - i)^2}{r_1^2} + \frac{(y - j)^2}{r_2^2} = 1$$
- Dimana i dan j mencerminkan koordinat pusat elips serta r1 dan r2 adalah jari-jarinya.

Hiperbola

- Bentuk umum persamaan hiperbola :
  $$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$
- Pusat hiperbola dapat dicari dengan cara memanipulasi persamaan umum sedemikian rupa, sehingga :
  $$\frac{(x - i)^2}{m^2} - \frac{(y - j)^2}{n^2} = 1$$

  atau

$$\frac{(y-j)^2}{n^2} - \frac{(x-i)^2}{m^2} = 1$$

- Persamaan untuk asimtot-asimtotnya dapat dicari melalui bentuk rumus berikut:

$$\frac{x-i}{m} = \pm\frac{y-j}{n}$$

Atau

$$\frac{y-j}{n} = \pm\frac{x-i}{m}$$

Parabola

- Bentuk umum persamaan parabola:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Atau

$$x = ay^2 + by + c$$

- Untuk parabola, bentuk persamaan 1 parabolanya terbuka ke bawah jika a<0 dan terbuka ke atas jika a>0. Sedangkan untuk bentuk persamaan2 parabolanya terbuka ke kanan jika a>0 dan terbuka ke kiri jika a<0.
- Titik ekstrim parabola adalah :

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2-4ac}{-4a}\right)$$

Dimana -b/2a adalah jarak titik ekstrim dari sumbu vertikal y, sedangkan $\frac{b^2-4ac}{-4a}$ adalah jarak titik ekstrim dari sumbu horizontal x.

Fungsi Eksponensial (pangkat)

• Aplikasi dalam ekonomi:

– Berkaitan dengan masalah pertumbuhan atau secara umum dalam dinamika ekonomi.

– Berkaitan dengan masalah optimisasi dalam variabel waktu (t).

• Sifat-sifat fungsi polinomial:

– Eksponen berarti indikator daya yang dipakai untuk meningkatkan variabel.

– Persamaan daya: x^3 → eksponennya tetap.

– Dalam3^t → angka 3 akan dinaikkan menjadi variasi daya (bergantung t).

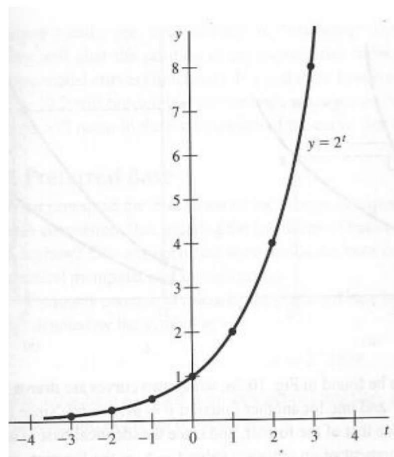
- Fungsi eksponensial sederhana

$$y = f(t) = b^t \qquad (b > 1)$$

y: variabel terikat, t: variabel bebas, b: bil. pokok eksp.

– Mengapa b > 1 ?:
- b = {real} → t boleh = ½
- Jika b < 0, maka $y = (-b)^{½}$ →Imaginer
- Jika b < 1, mis: $y = (½)^t = 2^{-t}$ → nilainya > 1
- Jika b = 1, maka y = 1 → konstan

Ciri-ciri menonjol dari grafis eksponensial:
– Kontinyu di setiap titik →everywhere diferentiable
– Meningkat tajam→turunan 1 dan 2-nya positif
– Nilai fungsi antara 0 dan ~ → y bervariasi positif
– Sifat monoton fungsi eksponensial berimplikasi:
• Invers fungsinya pasti bersifat monoton juga →fungsi logaritma
• Setiap angka ⊕ merupakan daya yang unik dari bilangan pokok (basis) b>1
• Bagaimanapun berubahnya basis (>1), jangkah nilai fungsi (0,~) tidak berubah.
– Basis yang biasa diambil berupa bilangan irrasional e = 2,71828……
sehingga diperoleh fungsi eksponensial alami:
$y = e^t$ = exp(t)



- Fungsi Eksponensial Alami (Natural)
  – Bilangan e didefinisikan: $e \equiv \lim_{m \to \infty} f(m) = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$
  – Fungsi eksponensial alami:

$$e^x = \phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \frac{\phi''(0)}{2!}x^2 + \frac{\phi'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\phi^{n}(0)}{n!}x^n + R_n$$

$$e^x = \phi(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_n$$

  – Untuk x = 1 → $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$

$$e = 2{,}7182819\ldots.$$

– Apa arti bilangan e dalam ekonomi?

• Hasil dari modus bunga majemuk (berlipat)

– Misal: dengan modal \$1, bank menawarkan suku bunga 100%/thn. Jika bunga dilipatgandakan setahun sekali, nilai aset diakhir tahun akan \$2.

V(1) = modal awal (1 + suku bunga)

$$y = Q^2 - 22Q + 222$$

V(1) = 1(1+100%) =$(1+\frac{1}{1})^2$ = 2

– Jika bunga dilipatgandakan persemester, nilai modal di akhir tahun:

V(2) = (1 + 50%)(1 + 50%) = $(1+\frac{1}{2})^2$

– Selanjutnya, V(3) = $(1 + \frac{1}{3})^3$, V(4) = $(1 + \frac{1}{4})^4$, dst.

$$V(m) = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

untuk m = frekuensi penarikan bunga per tahun

– Pada kasus tertentu, jika bunga ditarik kontinyu selama setahun (m→~), nilai aset akan meningkat seperti bola salju pada akhir tahun:

$$\lim_{m\to\infty} V(m) = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e\,(\text{dollar})$$

– Suku bunga efektif sekitar 172%/tahun.

Fungsi logaritma

• Arti Logaritma (log):

– Jika ada dua angka (mis: 4 dan 16) yang dihub-kan oleh persamaan $4^2 = 16$, maka eksponen 2 adalah logaritma 16 dg basis 4:

$$log_4 16 = 2$$

– Log: daya dimana basis (4) harus dinaikkan untuk mencapai bilangan tertentu (16).

Secara umum:

$y = b^t \Leftrightarrow t = \log_b y$

atau: $b^{\log_b y} = y$

- Aturan-aturan logaritma
  - Log perkalian → $\text{Log}_b\,(uv) = \text{Log}_b\,u + \text{Log}_b\,v$
  - Log pembagian → $\text{Log}_b\,(u/v) = \text{Log}_b\,u - \text{Log}_b\,v$
  - Log pangkat → $\text{Log}_b\,u^a = a\,\text{Log}_b\,u$
  - Konversi basis log → $\text{Log}_b\,u = (\text{Log}_b\,e)\,(\text{Log}_e\,u)$
  - Invers basis log → $\text{Log}_b\,e = 1/(\text{Log}_e\,b)$

Contoh penerapan dalam ekonomi

• Contoh :

Pengeluaran total sebuah perusahaan:

$$y = Q^2 - 22Q + 222 \text{ , maka:}$$

– Pengeluran minimum perusahaan terjadi pada:

Q=-b/(2a)=11

– Dengan nilai pengeluaran

$$Tc_{min} = 11^2 - 22(11) + 222$$

• Contoh :

Sebuah perusahaan memiliki total revenue:

TR= $44Q - 2Q^2$ dan

average cost:

AC=2Q-12+44/Q

– TR maksimum terjadi pada: Q = -b/(2a) = 11

$$TR_{max} = 44(11) - 2(11)^2$$
$$TR_{max} = 242$$

- TC minimum terjadi pada:
  - **TC = AC.Q**= $2Q^2 - 12Q + 44$ → Q = -b/(2a) = 3
  - $TC_{min} = 2(3)^2 - 12(3) + 44 = 26$
- Laba maksimum terjadi pada:
  - $\pi = TR - TC = -4Q^2 + 56Q - 44$ → Q = 7
  - $\pi_{max} = -4(7)^2 + 56(7) - 44 = 152$

B. Kegiatan Pembelajaran

1. Mengkaji materi melalui ceramah dan melakukan tanya jawab mengenai konsep fungsi non linier
2. Memberikan contoh fungsi non linier
3. Mengaplikasikan fungsi non linier dalam penerapan ekonomi

C. Evaluasi Pembelajaran

1). Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat

$$3x^2 + x - 2 \geq 0, x \in R$$

2). Nilai dari ${}^{2}\log 8 - {}^{\frac{1}{2}}\log 0{,}25 + {}^{3}\log \frac{1}{27} + {}^{2}\log 1 = ...$

3). Perhatikan ,

Jika $f(x) = \dfrac{3x - 2}{4x + 1}$ dan $f^{-1}(x)$ merupakan invers dari fungsi $f(x)$, maka $f^{-1}(x) = ...$

4).

Titik balik minimum kurva $y = x^3 - 12x + 1$ adalah ....

5).

Nilai minimum dari $f(x) = x^2 - x$ dalam interval $-1 \leq x \leq 3$ adalah ....

6). Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$3^{2x-2} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+4}$$

D. Referensi

Chiang, Alpha C., Dasar-Dasar Matematika Ekonomi, Jilid 1, Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, Jakarta

Dumairy, (2003/2004), Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, Cetakan ke 12, BPFE Yogyakarta, Yogyakarta.

H. Johannes dan Budiono Sri Handoko, (1994), Pengantar Matematika untuk Ekonomi, LP3ES, Jakarta.